ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 29 SEPTEMBRE 1941.

PRÉSIDENCE DE M. HYACINTHE VINCENT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le deuxième acide dl-époxy-*2.6 *heptène*-3 *carboxylique*-3. Note (¹) de MM. **Marcel Delépine et Marius Badoche.**

L'acide époxy-2.6 heptène-3 carboxylique-3 $C^8H^{12}O^3$ peut exister sous quatre formes stéréoisomères, formant deux racémiques différents, suivant que les deux méthyles 2.6 se trouvent en *cis* (I) ou en *trans* (II) :

(I) (II)

Un de ces deux racémiques a été décrit par l'un de nous (²) et même été dédoublé (avec M. Willemart) (³). C'est le produit jusqu'ici isolé, lorsqu'on oxyde l'aldéhyde correspondant par le nitrate d'argent en présence de baryte; la question que nous nous sommes posée, c'est de savoir si l'aldéhyde générateur ne contiendrait pas un peu d'isomère susceptible de conduire à l'autre acide. Nous avons effectivement obtenu ce dernier, non sans peine; pour plus de commodité, appelant *a* le premier acide connu, nous désignerons le nouveau comme acide *b*.

(¹) Séance du 22 septembre 1941.

(²) M. Delépine, *Comptes rendus*, 150, 1910, pp. 394 et 535; *Ann. Chim. de Phys.*, 8e série, 20, 1910, p. 389.

(³) M. Delépine et A. Willemart, *Comptes rendus*, 211, 1940, p. 153.

Obtention de l'acide b, $C^8H^{12}O^3$. — Nous rappelons que l'acide *a* existe anhydre, F 91°,5 ou monohydraté, F 66 à 67° (fus. inst. bloc). Quand on oxyde l'aldéhyde $C^8H^{12}O^2$ dimère de l'aldéhyde crotonique, on obtient, après une abondante cristallisation d'acide *a*, une faible portion pâteuse, souvent colorée, laissée jusqu'ici de côté. Pour en retirer l'acide *b*, on étale la pâte sur de la porcelaine poreuse qui s'imbibe de la partie huileuse; au bout de quelques semaines, la partie qui n'a pas pénétré dans la porcelaine, reprise par l'éther de pétrole, laisse cristalliser d'abord beaucoup d'acide *a*; l'éther de pétrole chassé en partie, on récolte encore de gros cristaux du même acide, mais on voit fréquemment, à côté, une nouvelle forme en bâtonnets ou aiguilles qu'on peut séparer par triage à la pince.

Quant à la partie imbibée, on l'extrait à l'éther, puis on chasse l'éther, ce qui laisse un résidu brun, poisseux qui refuse de cristalliser. On a alors distillé ce résidu sous 3^{mm}; la moitié environ passe de 120 à 130° et cristallise en partie au bout de plusieurs jours; on essore les cristaux et porte la partie liquide à la glacière, d'où une nouvelle partie solide qu'on enlève et fait cristalliser dans l'éther de pétrole; il se sépare encore de l'acide *a* en premier lieu, puis ensuite de l'acide *b* impur.

Les diverses portions d'acide *b* sont réunies et soumises à des cristallisations étroitement surveillées, pour en séparer les cristaux *a* et les cristaux *b*; on finit par arriver à l'acide *b* pur, exclusivement en longs rectangles accolés comme le nitre (en dimensions fort réduites, bien entendu). Le rendement est de l'ordre de 1 % de l'acide total; il est possible qu'il y en ait plus; nous parlons de ce que nous avons pu obtenir d'après les manipulations précédentes. Cette faible proportion expliquera que nous ne puissions faire de l'acide *b* une étude comparable à celle de l'acide *a*.

dl-acide b. — Le nouvel acide fond à 93°-93°,5 (tube capillaire, bain de SO^4H^2), à 93°,5-94° (par fus. instant. au bloc), alors que l'acide *a* bien anhydre fond à 91°,5 (Delépine avait indiqué 85-87°, mais on rappelle qu'il y a un hydrate fus. beaucoup plus bas). De si petites différences porteraient à croire qu'il s'agit d'un même corps plus ou moins pur, mais il y a bien deux acides, car le point de fusion de leur mélange à parties égales fond de 75 à 78°. Quelques épreuves supplémentaires le démontrent.

Analyse. — Trouvé %, C 61,59; 61,40; H 7,88; 7,84. P. M. (acidim.), 157.
Calculé %, C 61,50; H 7,74. P. M. 156.

Solubilités en 100^g d'eau à 19° : pour l'acide *a*, $0^g,7$; pour l'acide *b*, $2^g,6$. La solubilité de l'acide *b* dans les solvants organiques surpasse aussi celle de l'acide *a* : on ne fait bien recristalliser l'acide *b* que dans l'éther de pétrole. En outre, tandis que le *dl-acide a* cristallise dans l'eau en formant un monohydrate, le *dl-acide b* reste anhydre.

dl-acide hydroxybromé ba, $C^8H^{13}O^4Br, H^2O$. — On le prépare par action de l'acide sulfurique (3^{cm^3},3 N) sur une solution de l'acide (0^g,25 en 12^{cm^3} d'eau) contenant les générateurs du brome (0^g,085 BrO^3K

et $0^g,35$ Br K), en opérant comme l'ont indiqué Delépine et Willemart [4]. On obtient $0^g,23$ d'acide monohydraté en cristaux fus. à 101-106° (faible décomposition), assez solubles dans l'eau et les solvants organiques. L'*acide dl hydroxybromé ba* est hydraté, tandis que le correspondant de l'acide *a* est anhydre et fond beaucoup plus haut, à 187°.

Analyse sur acide hydraté. — Trouvé, P. M. 239; Br %, 29,9; théorie, P. M. 235; Br %, 29,52.

Cette nouvelle différence suffirait à prouver l'individualité de l'acide *b*. Nous avons tenu à en manifester d'autres.

dl-amide de l'acide b, $C^8H^{13}O^2N$. — On a traité l'acide ($0^g,3$) par le chlorure de thionyle (1^g) à 50° pendant 30 minutes, puis on a passé à l'amide. Celui-ci ($0^g,25$) recristallisé dans l'éther de pétrole, se présente en aiguilles fus. à 168° (bain de SO^4H^2, chauffage lent), à 175° (bloc, fus. instant.), alors que l'amide de l'acide *a* fond dans les mêmes conditions à 163° ou à 168°. Là encore les p. f. sont voisins; le mélange des deux amides fond nettement plus bas, à 154°-158° (bain de SO^4H^2). Analyse : Trouvé %, N 9,3 au lieu de 9,02.

Hydrogénation en acide saturé, $C^8H^{14}O^3$. — L'hydrogénation de l'acide préalablement neutralisé par la soude, en présence de nickel Raney, effectuée comme d'habitude, a permis d'obtenir un acide époxy-2.6 heptane carboxylique-3, ou plus exactement un mélange des deux acides possibles. Malheureusement l'acide dihydrogéné, même après deux ans de séjour à la glacière, n'a pas cristallisé. Nous nous sommes contentés d'en préparer un anilide, non sans avoir noté qu'au cours de l'hydrogénation il s'était formé une très petite quantité (quelques milligrammes à partir de $1^g,2$) d'un acide fondant à 124° (bloc), que nous considérons comme l'acide époxy-2.6 heptène-2 carboxylique-3, dont Delépine et Horeau [5] ont observé la formation lors de l'hydrogénation de l'acide *a*.

Anilide ba, $C^{14}H^{19}O^2N$. — Préparé avec l'acide dihydrogéné liquide et le chlorure de thionyle (30 min. à reflux), le chlorure d'acide obtenu a été changé en un anilide huileux qui a fini par cristalliser partiellement. Les cristaux, purifiés par la ligroïne, puis par un mélange d'éther et d'éther de pétrole, sont obtenus finalement en aiguilles F 168-169° (bain de SO^4H^2, chauffage progressif), 172° (instant. bloc), alors que l'anilide de

---

(4) *Comptes rendus*, **211**, 1940, p. 313.
(5) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 27.

l'acide *a* dihydrogéné fond à 184° (bloc); le mélange des deux anilides fond 8° plus bas que l'anilide *ba*. Analyse : Trouvé %, N 6,1 au lieu de 6,0.

Nous ne sommes pas en mesure de donner des raisons pour décider à laquelle des formules (I) ou (II) il faut faire correspondre les acides *a* et *b*. C'est un des problèmes que nous avons en vue, mais cette étude s'avère difficile. En attendant, nous profitons de la connaissance de plusieurs des isomères déjà obtenus et prévus pour en proposer le classement provisoire, d'après une convention bien simple qui serait applicable à tous les cas où les constitutions ne sont pas encore élucidées, ce qui arrive souvent quand il y a stéréoisomérie : c'est d'appeler systématiquent *a* le premier isomère trouvé; *b*, *c* etc., ceux qu'on découvre ensuite. A leur tour, si les isomères de base *a*, *b*, *c*, ... conduisent à d'autres dérivés isomères entre eux, le premier issu de *a* sera *aa*, le second, *ab*; s'il est issu de *b* le premier sera *ba*, le second, *bb*, et ainsi de suite, ces indicatifs se trouvant à la fin du nom chimique. S'il y a des corps actifs ou des racémiques, on les désignera comme d'habitude par les signes *d*, *l* ou *dl* en avant du nom. La nomenclature terminale est déjà parfois employée; on pourrait la systématiser sans inconvénient, pour la faire disparaître lorsque les constitutions seraient définitivement établies. C'est ainsi que, dans notre série, nous aurions quelques exemples :

1. Acide $C^8H^{12}O^3$, fus. à 91°,5. — *dl* Ac. époxy-2.6 heptène-3 carboxylique-3 *a*.
2. Ac. actifs » » 95° . — *d* ou *l* » *a*.
3. Acide » » 93°,5. — *dl* » *b*.
4. *dl* amides, *dl* anilide de l'acide *a*.
5. *dl* amide de l'acide *b*.
6. Acide $C^8H^{14}O^3$, fus. à 92° . — *dl* Ac. époxy-2.6 heptane carboxylique-3 *aa*.
7. Ac. actifs » » 72 . — *d* ou *l* » *aa*.
8. Acide » » 89 . — *dl* » *ab*.
9. *dl* amides des acides *aa*, *ab*.
10. Acides liquides dihydrurés de l'acide *b*; seraient *ba* et *bb*.
11. *dl* anilide *ba*, fus. à 172° (de l'acide *ba*).
12. Dérivé hydroxybromé, » 187 (*dl*... avec finale *aa*).
13. D. actifs » » 90 (*d* ou *l* » *aa*).
14. Dérivé » » 101-106° (*dl* » *ba*).

Sans supprimer des désignations plus complètes, ces suffixes permettent de ne pas répéter, au cours d'un développement, des noms souvent assez longs.

BIOLOGIE. — *Sur la priorité dans les groupes d'organes homéotypes qui évoluent par tout ou rien.* Note (¹) de M. **François Grandjean.**

Je suppose chez des Arthropodes, des Acariens par exemple, un groupe d'organes homéotypes qui se reforme à chaque mue et dans lequel on ait résolu tous les problèmes d'homologie. On relève les présences et les absences aux états successifs de l'ontogenèse, d'abord sur une espèce, ensuite sur d'autres, chaque espèce et chaque stase étant représentées par plusieurs individus. Dès que les résultats sont nombreux leur comparaison impose l'idée que les organes du groupe ne sont pas indépendants mais qu'une sorte de hiérarchie existe entre eux.

Pour exprimer cette hiérarchie convenons de dire qu'un organe est plus *fort* qu'un autre s'il a moins d'écarts par déficience, s'il est plus précoce, s'il est plus commun. Rangeons ensuite les organes du groupe selon leurs forces, dans le sens décroissant, en désignant chacun d'eux par sa notation. Nous avons une *liste de priorité*. Quand plusieurs organes ont la même force on les met ensemble dans la liste, entre parenthèses.

A vrai dire nous n'avons pas une seule liste, mais un grand nombre. Des listes fondées sur les seuls écarts peuvent être établies, par exemple, sur les tritonymphes d'une espèce, en comparant leurs individus dans chaque récolte et même, si l'on fait de l'élevage, dans chaque lignée. Aux autres stases on aura d'autres listes, d'autant plus courtes et d'autant plus pénibles à établir, en général, qu'il s'agira de stases plus jeunes. Les stases d'apparition probable une fois connues, leur comparaison dans le développement de chaque espèce donnera d'autres listes qui seront plus longues et surtout plus explicites. D'autres encore proviendront de la comparaison des espèces entre elles, à chacune de leurs stases. Elles seront courtes s'il s'agit de larves, plus longues s'il s'agit d'adultes.

Si toutes ces listes étaient réellement différentes on ne serait pas très avancé, mais on constate au contraire, et c'est pourquoi j'ai parlé plus haut de hiérarchie, qu'elles s'accordent en ce sens que l'ordre de priorité défini par une liste n'est pas contredit par une autre. Les listes particulières sont des expressions partielles d'une liste générale unique. On obtient donc cette liste générale en fusionnant les listes particulières. Elle est valable

(¹) Séance du 22 septembre 1941.

pour toutes les espèces étudiées, à toutes leurs stases et pour tous leurs individus, de quelque manière qu'on les compare. Sur un individu quelconque, immature ou non, lorsqu'un organe du groupe existe, tous ceux qui sont plus forts que lui, c'est-à-dire tous ceux qui sont inscrits avant lui sur la liste générale, existent aussi.

Les listes de priorité ne traduisent que des faits actuellement observables. Elles sont indépendantes des hypothèses. Il n'est pas même nécessaire, pour les établir, de supposer un sens à l'évolution. Elles prétendent néanmoins, non seulement à être commodes, mais surtout à suggérer des réponses aux questions phylogénétiques.

Lorsque les animaux étudiés sont assez voisins les uns des autres, une liste de priorité peut rendre compte exactement de toutes les observations. Elle les exprime sous une forme très condensée et permet d'en prévoir d'autres. Quand ils diffèrent davantage, des exceptions apparaissent. Il le faut bien, puisque l'évolution n'est pas régie par une seule loi, ni même par un seul groupe de lois toujours concordantes, mais évidemment par des lois nombreuses, d'origines diverses, indépendantes les unes des autres et fréquemment en conflit. Alors les exceptions révèlent des lois évolutives particulières, ou des bifurcations de la loi générale, ou encore peut-être, dans l'état très imparfait de nos connaissances, des erreurs d'homologie.

Bien entendu, ce que j'ai dit de la présence ou de l'absence d'un organe peut se dire de la présence ou de l'absence d'un caractère de tout ou rien, c'est-à-dire tel que chaque organe du groupe ne puisse que l'avoir ou ne l'avoir pas, sans ambiguïté et sans états intermédiaires. Dans ce cas la liste de priorité énumère les organes dans l'ordre décroissant des forces plus ou moins grandes avec lesquelles ils portent le caractère.

Voici quelques exemples :

1° *Le caractère acanthoïdique des poils tarsaux I et II dans le genre* Bimichælia.

D'après les espèces que j'ai étudiées jusqu'ici, la liste de priorité, sans exception, est

$$(p),\quad u',\quad u'',\quad s,\quad a',\quad a'',\quad (pv),\quad v'1\quad [2].$$

Aux poils proraux (p) le caractère acanthoïdique est très fort. Il est constant dès la larve, dans tous les cas. Au poil $v'1$ où ce caractère,

---

[2] Pour mes notations des poils pédieux voyez le *Bulletin de la Société Zoologique de France*, 65, 1940, p. 32-39, et 66, 1941, p. 34-38. Le poil $v'1$ est celui qui est derrière pv' sur le même alignement longitudinal.

inversement, est le plus faible, je ne l'ai observé que sous la forme d'écarts par excès, seulement au 1[er] tarse, chez des adultes d'une seule espèce. Un tarse qui a l'acanthoïde $v' 1$ doit avoir les 9 autres indiqués par la liste et c'est bien ce que l'on constate. Plus généralement il suffit de dire le nombre des acanthoïdes pour un *Bimichælia* quelconque, qu'il soit adulte ou immature, pour savoir où ils sont. Ainsi, quand il y a 5 acanthoïdes, ce sont nécessairement les poils proraux (p), les unguinaux (u) et le subunguinal s. S'il y en a 6 ce sont toujours les 5 précédents et l'antélatéral a' etc.

La liste montre aussi que le caractère acanthoïdique, s'il n'affecte pas également les deux poils d'une paire, est plus fort du côté paraxial que du côté antiaxial.

2° *Les poils larvaires des tibias III et les poils proto et deutonymphaux des tibias IV, chez les Oribates et les Endeostigmata, lorsque le nombre de ces poils n'est pas supérieur à* 3.

La liste de priorité est

$$v', \quad d, \quad l',$$

sauf trois exceptions dont je ne connais pas les causes (*Teleioliodes madininensis*, *Eulohmannia Ribagai*, *Parhypochthonius aphidinus*) et sauf les cas de suppression solénidionale du poil d.

J'ai fait remarquer depuis longtemps que le poil dorsal d peut disparaître comme conséquence de son groupement avec le solénidion dorsal φ ([3]). C'est une évolution particulière qui n'a rien à voir avec l'évolution régressive habituelle. Le poil supprimé, qu'il soit fort ou faible, est un de ceux qui se trouvaient au voisinage du solénidion.

La suppression solénidionale de d est fréquente chez les Oribates, sur les tibias et les génuaux. Il faut en tenir compte également dans les deux exemples qui suivent.

3° *Les poils des tibias I et II, chez les Oribates et les Endeostigmata, quand l'adulte a 5 poils et que la larve en a 3.*

La liste de priorité est

$$(v', \ d, \ l'), \ l'', \ v''.$$

Cette liste exprime le comportement normal des tibias II.

Aux tibias I et II les 3 poils larvaires v', d et l' paraissent avoir des forces égales. Je connais cependant un exemple où une différence apparaît. C'est

---

([3]) *Bull. Soc. Zool. France*, 60, 1935, p. 19-23.

celui de *Phthiracarus anonymum*, au tibia II. Le poil l' s'y montre le plus faible, car il manque, et les deux autres sont présents.

4° *Les poils des tibias I et II, chez les Oribates et les Endeostigmata, quand l'adulte a 5 poils et que la larve en a 4.*

Deux listes de priorité sont possibles, selon les espèces :

$$(v', d, l', l''), v'' \quad \text{et} \quad (v', d, l', v''), l''.$$

La coexistence de deux listes, chez les Acariens de tout un sous-ordre, n'aurait rien d'invraisemblable, mais je crois qu'elle révèle ici une erreur d'homologie. Les poils qualifiés de l'' et v'' ne seraient pas toujours homologues les uns des autres. Pour cette question difficile je ne peux que renvoyer à ce que j'en ai dit à propos de *Camisia* [4]. Le 4e poil larvaire serait un poil li'' qui pourrait occuper les positions l'' ou v'', ou rester à sa place, ou manquer.

Le 4e poil larvaire est donc moins fort que les 3 autres, et toutes les listes de priorité, qu'il s'agisse des tibias I, II, III ou IV, doivent commencer par v', d et l'. Ce résultat est très remarquable car les poils v' et l' sont antiaxiaux aux pattes III et IV et paraxiaux aux pattes I et II, comme le veut la loi d'homologie parallèle. Leur force plus grande ne provient donc pas d'une similitude de fonctions, mais d'une qualité ancienne et fondamentale qu'ils partageaient sans doute avec d'autres poils, primitivement, et qu'ils ont mieux conservée.

5° *Les segments de l'opisthosoma chez les acariens actinochitineux.*

La liste de priorité est

$$(\text{I à V}), \quad \text{VI}, \quad \text{VII}, \quad \text{VIII}.$$

Le numérotage des segments part du médiodorsum. Jusqu'ici j'ai constaté l'existence larvaire des 5 premiers chez toutes les espèces dont j'ai étudié l'ontogénie. Les 3 autres peuvent manquer. Le 6e, qui est protonymphal, est quasi constant. Le 7e, qui est deutonymphal, est très commun, mais il manque chez davantage d'acariens que le 6e. Quant au 8e segment, le plus faible, il n'est connu, à partir de la tritonymphe, que chez un petit nombre de genres (*Parhypochthonius*, *Speleorchestes*, la plupart des *Pachygnathidæ*, les *Terpnacaridæ*).

La liste a une signification précise parce que l'identité de numéro, pour des segments, qu'il s'agisse d'adultes ou de formes immatures, implique

(4) *Bull. Mus. Hist. nat. Paris*, 2e série, 12, 1940, p. 62-64.

leur homologie. Je crois du moins qu'il en est ainsi d'après un ensemble d'observations concordantes, mais un doute subsiste encore parce que les observations ne sont pas cruciales et qu'elles sont troublées dans certains cas, notamment chez les Oribates, par des apparences contraires. Dans un travail ultérieur je reviendrai sur cette question.

MÉTALLURGIE. — *Sur les traitements thermiques des aciers.* Note (¹) de M. GEORGES CHARPY.

J'ai présenté à l'Académie, en 1893 et 1894, plusieurs Notes (²) ultérieurement développées dans un Mémoire intitulé *Étude sur la trempe de l'acier* (³). Ce travail, effectué sur la demande et sous le contrôle de la Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale, et pour l'exécution duquel furent créés les premiers modèles de fours électriques de laboratoire chauffés par résistances, utilisait ces appareils, d'une part à la préparation d'éprouvettes pour essais mécaniques d'aciers divers trempés à partir de différentes températures, numériquement définies par le pyromètre de Le Chatelier, d'autre part à l'étude par enregistrement photographique, et à l'échauffement comme au refroidissement, de la recalescence et des phénomènes thermiques analogues signalés antérieurement par Gore, Barett et Osmond.

Henry Le Chatelier, qui avait provoqué et suivi cette étude, considéra qu'elle avait « définitivement établi la corrélation directe entre le phénomène de la recalescence et les changements de propriétés mécaniques produits par la trempe. » [*L'état actuel des théories de la trempe de l'acier* (*Revue générale des Sciences*, 15 janvier 1897).]

Aucune des nombreuses recherches effectuées depuis cette époque sur le même sujet n'a infirmé cette conclusion, dont on conçoit facilement le grand intérêt pratique; il est cependant utile d'en reprendre l'examen de temps en temps, ne serait-ce que pour tenir compte des progrès de la technique, et surtout de l'augmentation considérable et continue du nombre des alliages utilisés dans l'industrie sous le nom d'aciers. Les recherches

(¹) Séance du 22 septembre 1941.

(²) *Comptes rendus*, 126, 1893, p. 1131; 128, 1894, pp. 418, 868 et 1258; 129, 1894, p. 735.

(³) *Bull. Soc. Encouragement Industrie Nationale*, 4ᵉ série, 10, juin 1894, p. 655.

dont nous parlons plus haut ont d'ailleurs porté, en majorité, sur l'étude des transformations d'ordre physicochimique subies par les aciers à diverses températures, qui ne constitue qu'une des faces du problème pratique; beaucoup moins nombreuses sont les publications relatives à l'autre face du problème, c'est-à-dire à des essais méthodiquement organisés et utilisant tous les progrès de la technique expérimentale, pour définir avec précision les propriétés mécaniques réalisables avec différents types d'acier, par application de traitements thermiques couramment utilisables. On obtient cependant de ce côté des données qui, même considérées comme purement empiriques, sont presque toujours directement utilisables dans les opérations industrielles.

L'effet d'un traitement thermique peut faire, dans beaucoup de cas simples, l'objet d'un diagramme suffisamment instructif. Par exemple, l'influence de la trempe dans un liquide se représente par un tracé dans lequel les abscisses correspondent à la température de chauffage, et les ordonnées à une propriété telle que la résistance à la traction, la dureté Brinell, la résilience etc. Il est clair que tous les points marqués sur un tel diagramme doivent correspondre à des opérations faites dans des conditions rigoureusement définies (nature de l'acier, dimensions de l'échantillon, nature et quantité du liquide de trempe etc.); il faudra, par suite, un nombre assez considérable de diagrammes pour représenter les faits les plus importants relatifs à un seul type d'acier. C'est là une grosse complication que ferait, *peut-être*, disparaître une connaissance théorique complète du phénomène, mais que, dans l'état actuel de nos connaissances, il ne paraît pas possible d'éviter.

Bien que ces observations se rapportent à des faits connus, il n'est pas inutile de les préciser par un exemple.

Les figures 1 et 2 reproduisent les diagrammes qui représentent les effets de la trempe à l'eau sur deux aciers usuels. Chacun des points marqués d'une croix correspond à une mesure de dureté effectuée sur un échantillon trempé à la température marquée; les points entourés de petits cercles correspondent à des mesures de dilatation faites sur les mêmes métaux; dans les deux cas, on a marqué seulement les points déterminés expérimentalement. Ces tracés sont empruntés à une collection actuellement en cours de constitution avec le concours de MM. Pierre Pingault et René Clavère.

La figure 1 donne le diagramme de trempe et la courbe de dilatation d'un acier au carbone ayant presque exactement la composition de la perlite. Il est clair que pour régler l'opération de trempe d'un tel acier, et tenir compte, éventuellement, des différences qui peuvent exister entre deux échantillons provenant de coulées différentes, il suffit, étant donnée la forme très simple des tracés, de connaître la courbe de dilatation. Mais il n'en est pas de même pour le métal auquel se rapporte la figure 2, qui est un acier contenant environ 1,5 % de chrome et 3,5 % de nickel. Ici la courbe de dilatation indique une transformation s'étendant sur un assez grand intervalle de température, dont il est d'ailleurs difficile d'apprécier avec précision le

commencement et la fin; de plus certains accidents bien marqués dans l'une des courbes ne correspondent à aucune particularité de l'autre. Les difficultés d'interprétation qui résultent de ces observations sont encore bien plus importantes quand on

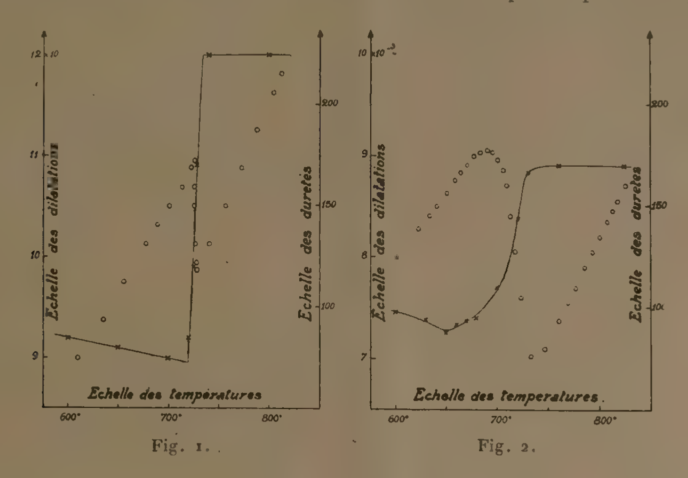


Fig. 1.

Fig. 2.

considère des traitements thermiques (et ils sont très nombreux), qui font intervenir des transformations irréversibles, celles-ci marquant peu ou pas sur les courbes relatives aux dilatations ou à d'autres phénomènes de nature analogue, qui conviennent surtout pour l'étude des transformations réversibles.

Ce qui précède conduit à attribuer, tout au moins en ce qui concerne les applications pratiques, beaucoup plus d'importance qu'on ne l'a fait jusqu'ici aux diagrammes de traitements thermiques et surtout à leur détermination précise; celle-ci ne présente d'ailleurs pas de difficulté spéciale, et dès qu'on l'effectue avec des soins suffisants, on voit apparaître des conclusions intéressantes.

En premier lieu, on constate facilement que le diagramme correspondant à un traitement déterminé se présente, pour un acier déterminé, sous une forme bien constante et aussi caractéristique de cet acier que la courbe représentant la variation d'une propriété quelconque en fonction de la température.

Par exemple, le minimum de dureté que l'on observe sur la figure 2 à la température de 650° se retrouve à la même température sur les diagrammes de tous les aciers présentant sensiblement la même composition chimique; sur des aciers de composition différente, on observe encore, en général, un minimum de dureté, mais à des températures qui peuvent être nettement différentes; pour certains aciers hypereutectiques, elles peuvent dépasser 750°.

En second lieu, on peut vérifier que les données numériques déduites du diagramme de traitement peuvent être transportées, du laboratoire dans l'atelier, avec des écarts qui ne dépendent que du réglage des fours et appareils employés et qui peuvent être réduits, à l'heure actuelle, à un très petit nombre de degrés. Cela présente un grand intérêt pratique, car la déformation des diagrammes de traitement, produite par les différences de composition est assez marquée pour qu'on puisse, en en tenant compte, déterminer les corrections de traitement à appliquer à divers échantillons d'un même type d'acier, pour faire concorder exactement l'une ou l'autre de leurs propriétés.

Voici un exemple d'un problème de ce genre qui se présente souvent dans les opérations industrielles :

Dans une fabrication en série comportant l'emploi d'aciers analogues à celui qui est visé dans la figure 2 soumis à un traitement de trempe et de recuit, on observait, en recuisant toutes les pièces à la même température des variations de la résistance à la traction atteignant au moins une vingtaine de kilogrammes (de 85 à 105^{kg} par millimètre carré), dues aux petites différences de composition entre les différentes coulées, effectuées cependant en vue d'arriver à une analyse constante. En déterminant le diagramme de traitement de chaque coulée et s'en servant pour faire varier la température de recuit, on a pu rendre ces différences quatre fois plus petites et amener la résistance de toutes les pièces entre 100 et 105^{kg} par millimètre carré.

On pourrait facilement citer de nombreux exemples de ce genre et cependant le moyen d'action puissant et relativement peu coûteux que constitue le traitement thermique est très loin d'être employé aussi fréquemment et aussi efficacement qu'il serait possible. Pour aider à cette généralisation, que rendent particulièrement désirable les difficultés de l'heure actuelle, il ne paraît pas inutile de souligner que l'on peut obtenir des résultats pratiques importants sans avoir à attendre de nouveaux progrès scientifiques, simplement par l'emploi judicieux et systématique de procédés et de méthodes parfaitement connus.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Étude théorique et expérimentale des jets gazeux supersoniques*. Note (¹) de M. **Dimitri Riabouchinsky**.

La théorie générale (²) des mouvements tridimensionnels presque rectilignes, pouvant comprendre des discontinuités d'un ordre quelconque,

---

(¹) Séance du 22 septembre 1941.

(²) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 472.

m'a permis d'obtenir [3] la solution sans discontinuités et une solution avec ondes de choc du problème d'un jet gazeux de section presque carrée. C'est la deuxième de ces solutions que nous discuterons dans cette Note en conservant les notations des communications précitées.

1. Les lignes équipotentielles, les lignes de courant et les traces des ondes de choc, ces dernières en trait plus épais, sont données, pour une période, dans les figures 1 et 3 respectivement pour une section *diagonale*, passant par l'axe du jet et les diagonales de ses sections droites, et une section *médiane*, passant par l'axe du jet orthogonalement à ses côtés. La figure 2 donne trois sections droites du jet, orthogonales à son axe. Ces figures ont été calculées en donnant aux paramètres des équations (2) de la Note précitée [2] les valeurs $a^2 = q_1^2/c^2 - 1 = 3$, $a_1 = a_2 = 1 : \sqrt{2}$, $\alpha = 0, 1$.

2. Dans les applications aux jets émis par une tuyère à détente plus ou moins complète, on peut définir le paramètre α par la surpression maxima $p - p_1$ au centre de l'orifice de la tuyère. Ainsi, avec les équations (2), il vient $\alpha = (p - p_1)\sin^2\theta_1 : p_1 2\sqrt{2}\gamma$, où θ_1 est l'angle de Mach en un point de pression p_1 et de vitesse q_1. La variation de pression $p - p_1$ est liée à la valeur locale de l'angle θ de Mach par l'équation $p - p_1 = p_1(\sin\theta_1 - \sin\theta)\,\text{séc}^2\theta_1\,\text{coséc}\,\theta_1$.

3. Pour nous représenter le système d'ondes de choc dans l'espace, considérons la figure 4 où sont tracées d'une façon schématique les ondes $w_1 = n\pi$ et $\overline{w_1} = n\pi$, $\pm n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Pour obtenir le système d'ondes $w_2 = n\pi$, $\overline{w_2} = n\pi$, il faut tourner le système d'ondes du schéma 4 de $\pi/2$ autour de l'axe du jet. On obtient le schéma complet en superposant ces deux systèmes d'ondes qui se coupent le long des arêtes *ao*, *bo*, *co*, *do* et oa_1, ob_1, oc_1, od_1, de domaines en forme de pyramides, où la densité est respectivement maxima et minima. Les points correspondants sur les figures 1, 3, 4 sont désignés par les mêmes lettres.

4. Les photographies 6 et 7, obtenues par le procédé des ombres de Dvorak, correspondent à un éclairage respectivement perpendiculaire à un côté et parallèle à une diagonale de l'orifice de la tuyère convergente-divergente (*fig.* 5), réalisée pour l'étude expérimentale des jets de section carrée ($17 \times 17^{\text{mm}^2}$). Le jet était obtenu par la détente dans l'atmosphère de l'air soumis, dans un réservoir de 1^{m^3}, à une pression $p = 5{,}5\,p_1$, où p_1 est la pression atmosphérique. Le point lumineux

---

[3] *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1765.

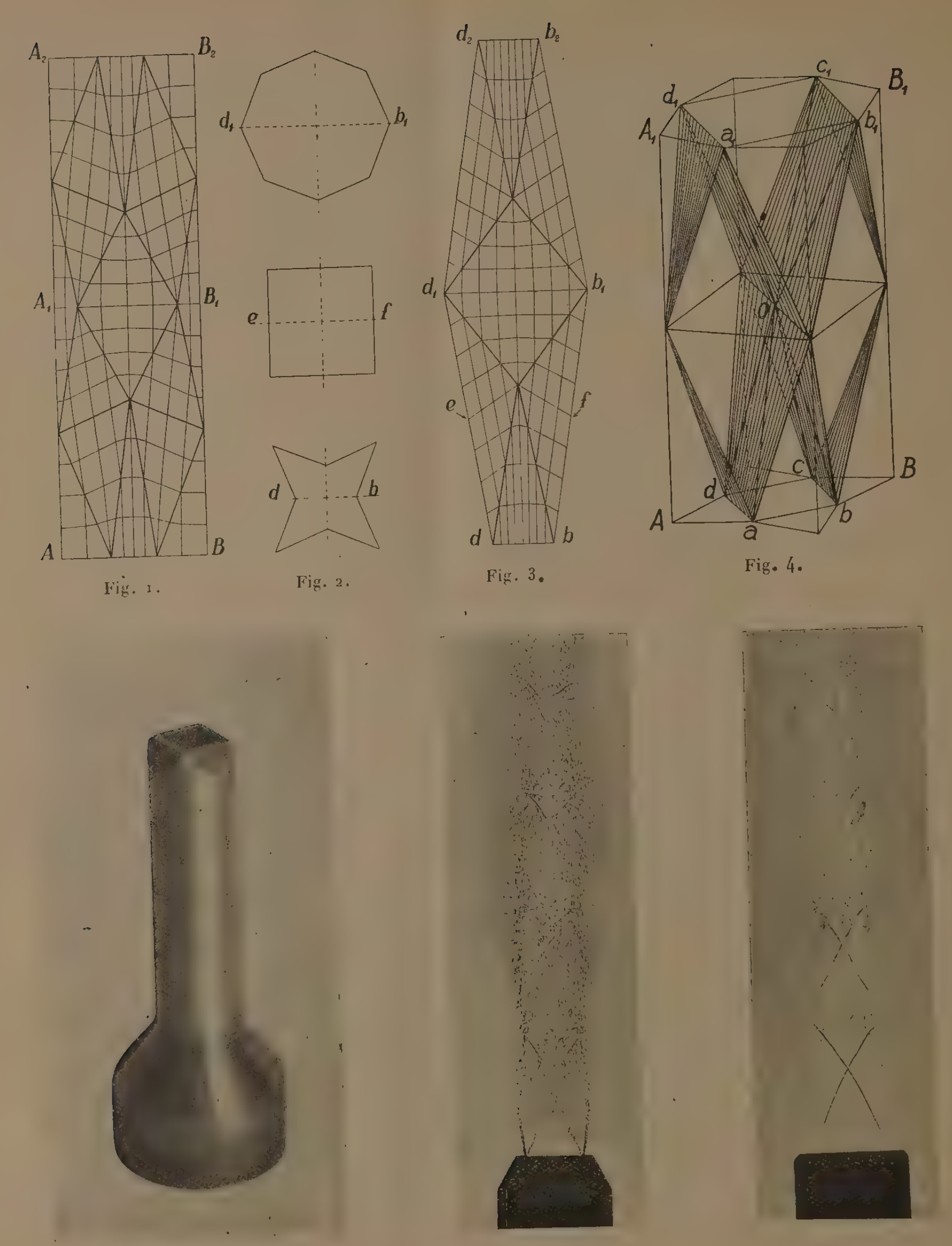


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

était produit par le dispositif d'amorçage stroborama de MM. L. et A. Seguin et l'éclateur Libessart.

5. Les discontinuités prenant naissance à l'extrémité de sortie de la tuyère, on peut admettre que le carré *abcd* de la figure 4 correspond à l'orifice de la tuyère, tandis que les masses environnantes d'air, entraînées par le frottement, complètent en quelque sorte les parties du jet, extérieures à ce carré. Cette remarque conduit à faire correspondre les singularités de la partie ABB_1A_1 de la figure 1 et celles de la partie dbb_1d_1 de la figure 3 respectivement aux singularités similaires des figures 6 et 7.

Il résulte des deux formules de la section 2 et de l'examen des figures 6 et 7 qu'au voisinage de l'orifice de la tuyère on a $p - p_1 = 0,385 p_1$ et, par conséquent, $\alpha = 0,0307$. La dépression correspondante $p - p_1 = -0,385 p_1$ n'est pas atteinte dans la zone de densité minima, où l'on ne trouve approximativement que $p - p_1 = 0$.

Le mouvement dans les zones de compression progressive, telles que $d_1 b_1 b_2 d_2$ (*fig.* 3), étant, en général, instable, cette compression se produit par ondes de choc et le jet se transforme en un *chapelet* de zones de détente progressive séparées par des zones étroites de brusque recompression. Ce sont de pareilles singularités qui furent photographiées en 1899 par Emden sous la forme de disques équidistants dans un jet de section circulaire et qu'on aperçoit, sous une forme différente, sur les figures 6 et 7 d'un jet de section carrée.

L'appareil de l'analogie hydraulique m'a permis ([4]) de bien mettre en

---

([4]) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 1727. La première Note, où j'ai développé ma théorie de l'analogie hydraulique des mouvements bidimensionnels d'un fluide compressible, généralisant la théorie déjà ancienne, bien connue et que j'ai mentionnée, de l'analogie des mouvements rectilignes, a été présentée à l'Académie le 28 novembre 1932 (*Comptes rendus*, **195**, 1932, p. 998). Peu après M. Émile Jouguet a attiré mon attention sur son Mémoire *Quelques problèmes d'hydrodynamique générale* (*Journ. de Math.*, 8e série, 3, 1920, p. 3-13). Dans ce travail notre Confrère discute d'une façon approfondie le problème de l'analogie hydraulique des mouvements rectilignes, par tranches parallèles, mais on n'y trouve pas d'observations sur l'analogie des mouvements bidimensionnels. Je donne ces précisions pour élucider le malentendu qui a conduit M. v. Karman à écrire : *Die Analogie zwischen der zweidimensionalen Strömung eines Gases und der zweidimensionalen Wasserströmung in einem offenen Gerinne wurde meines Wissens zuerst von Jouguet angegeben. Die Analogie wurde weiter ausgearbeitet und weitgehend zu Untersuchungen von Gasströmungen benutzt von Riabouchinsky* (*Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Berlin, **18**, 1938, p. 49.)

évidence l'instabilité des mouvements de compression, le mécanisme de la formation des ondes de choc dans ces conditions et la dissipation d'énergie qui en résulte.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Corrrespondance :

Jean Torlais. *Le journal d'un bourgeois de La Rochelle pendant la Révolution* (Document inédit).

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les couples de surfaces admettant mêmes directrices de Wilczynski.* Note [1] de M. **Marcel Decuyper.**

Soit (M) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques (u, v) et à son tétraèdre normal de Cartan $MM_1M_2M_3$. MM_1 et MM_2 sont les tangentes asymptotiques, MM_3 est la première directrice de Wilczynski, M_3 son intersection avec la quadrique de Lie du point M, M_1M_2 est la seconde directrice.

La surface (M) est définie projectivement par les équations

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{M}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} + M_1, \qquad \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{M}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v} + M_2,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial u} = MB^2 - \frac{M_1}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} + \beta M_2, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial v} = Ml + \frac{M_1}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v} + M_3,$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial u} = Mk + \frac{M_2}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} + M_3, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial v} = MA^2 + M_1\gamma - \frac{M_2}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial u} = M\beta A^2 + M_1 k + M_2 B^2 - \frac{M_3}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u}, \qquad \frac{\partial M_3}{\partial v} = M\gamma B^2 + M_1 A^2 + M_2 l - \frac{M_3}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v},$$

où β, γ, k, l, A^2, B^2 sont liés par les conditions d'intégrabilité

$$2k = \beta\gamma - \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v}, \qquad 2l = \beta\gamma - \frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v},$$

$$(A^2)_u = k_v + k\frac{\partial \log\beta}{\partial v}, \qquad (B^2)_v = l_u + l\frac{\partial \log\gamma}{\partial u},$$

$$A(\beta A)_v = B(\gamma B)_u.$$

---

[1] Séance du 22 septembre 1941.

Nous allons établir quelques propriétés relatives à une surface (M) dont les directrices sont en même temps directrices pour une autre surface.

1. Soit une surface (P) admettant MM_3 pour première directrice, M_1M_2 pour deuxième directrice.

a. Si P est confondu avec M_3, en écrivant que le plan tangent en P contient M_1M_2, on a les conditions

$$A = B = 0.$$

Dans ce cas, les deux surfaces (M), (M_3) forment un couple de Demoulin Godeaux avec mêmes quadriques de Lie.

b. En dehors de ce cas, nous pouvons déterminer P par $\lambda(u, v)$ tel que

$$P = M + \lambda M_3.$$

En écrivant que le point caractéristique du plan (PM_1M_2) est P, nous avons

$$(1) \qquad \lambda_u = \lambda\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} + \lambda^2\beta A^2, \qquad \lambda_v = \lambda\frac{\partial \log\beta}{\partial v} + \lambda^2\gamma B^2.$$

La condition $\lambda_{uv} = \lambda_{vu}$, se réduit à

$$(2) \qquad \lambda\left(\frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v}\right) = 0.$$

Nous n'aurons donc de solutions différentes de zéro que si

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} \qquad \text{ou} \qquad k = l.$$

La surface (M) est alors isotherme asymptotique.

Donc, *si deux surfaces* (M) *et* (P) *ont mêmes première et deuxième directrices en tous leurs points correspondants, elles forment un couple de Demoulin-Godeaux, ou bien elles sont toutes deux isothermes asymptotiques*.

2. Soit maintenant une surface (P) admettant M_1M_2 pour première directrice, MM_3 pour seconde. Nous déterminerons P par $P = M_1 + \mu M_2$.

En écrivant que le point caractéristique du plan (PMM_3) est P, nous obtenons :

$$(4) \qquad \mu_u = -\beta - \mu\frac{\partial \log\gamma}{\partial u}, \qquad \mu_v = \mu^2\gamma + \mu\frac{\partial \log\beta}{\partial v}.$$

La condition $\mu_{uv} = \mu_{vu}$ donne

$$(5) \qquad \mu\left(\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} - 2\beta\gamma\right) = 0.$$

Pour que la solution $\mu = 0$ convienne, il faudrait, d'après la première équation (4), que β fût nul, c'est-à-dire que la surface (M) fût réglée, hypothèse que nous avons écartée.

Le système (4) n'a donc de solutions que dans le cas de la complète intégrabilité, où l'on a

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} - 2\beta\gamma = 0,$$

condition qui peut s'écrire aussi

$$k + l = 0. \tag{6}$$

Les congruences des premières et deuxièmes directrices de la surface (M) *ne peuvent être congruences des deuxièmes et premières directrices d'une autre surface que si la condition* (6) *est satisfaite.*

3. Les deux conditions (3) et (6) ne peuvent être satisfaites simultanément que pour

$$k = l = 0.$$

Alors les deux congruences de directrices de la surface (M) forment un couple stratifiable, et les deux asymptotiques des deux familles de cette surface appartiennent à des complexes linéaires.

Étant donnée une surface (M), *s'il existe* 1° *une surface* (P) *ne formant pas avec un couple de Demoulin-Godeaux et ayant mêmes premières et secondes directrices de Wilczynski que* (M); 2° *une surface* (Q) *ayant pour premières et secondes directrices respectivement les secondes et premières directrices de* (M), *les asymptotiques des deux familles de* (M) *appartiennent à des complexes linéaires.*

Réciproquement, étant donné une surface dont les asymptotiques des deux familles appartiennent à des complexes linéaires, les congruences des directrices de Wilczynski forment un couple stratifiable, et les surfaces de stratification admettent mêmes directrices de Wilczynski que la surface considérée.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur les nombres transfinis.*

Note [1] de M. **Arnaud Denjoy**, présentée par M. Émile Borel.

I. Toute loi d'ordination de la suite des entiers positifs [condition $n \prec p$ (n antérieur à p) ou $n \succ p$ (n ultérieur à p) énoncée pour tout couple n, p

[1] Séance du 22 septembre 1941.

avec $n \prec p$, $p \prec q$ s'accompagnant toujours de $n \prec q$], autre que

(N) $$1 \prec 2 \prec \ldots \prec n \prec \ldots \qquad (n \prec p \text{ si } n < p),$$

sera dite une *permutation* de la suite (N). Toute application d'un ensemble dénombrable sur une permutation P de (N) définit une énumération et une ordination de D, et réciproquement.

La condition que n vienne immédiatement après $n-2$ pour $n \geq 3$, 1 et 2 restant inchangés, donne la permutation $1 \prec 3 \prec 5 \prec \ldots \prec 2 \prec 4 \prec 6 \prec \ldots$ dont le type est de rang $\omega \times 2$.

x étant un nombre du segment 0,1, soit $\Sigma a_n/n!$ $(0 \leq a_n \leq n-1)$, ce que j'appelle le *développement népérien* de x [2]. Les entiers a_n seront dits les *chiffres* de ce développement $E(a_1, a_2, \ldots)$. On peut associer l'un à l'autre toute permutation P de (N) et tout développement népérien, par la condition suivante : e'_{n-1} étant l'ensemble des nombres 1, 2, ... [redacted]
disposés entre eux conformément à P, et précédés de o [redacted]
et ne participant pas à P], choisissons pour a_n celui [redacted]
lequel, en vertu de P, n vient se placer dans e'_n. [redacted]

Pour que la permutation P *définie par* $E(a_1,$ [redacted] *ordonnée, il faut et il suffit que :*

1° *Aucun chiffre a* (y compris o) *ne se rencontre une infinité de fois dans* E;

2° *Quelle que soit la façon de choisir* n_1, *puis le rang* n_2 *où l'on trouve le chiffre* n_1 $(a_{n_2} = n_1)$, *puis le rang* n_3 *où l'on trouve le chiffre* n_2 $(a_{n_3} = n_2)$, *etc., et si la suite ne s'arrête pas, le chiffre* n_p *cesse de se rencontrer entre les rangs* n_p *et* n_{p+1}, *à partir d'une certaine valeur de p.*

Donc, *nous caractérisons ainsi un nombre transfini sans énoncer explicitement l'hypothèse de la construction de tous les nombres antérieurs à lui.*

II. Le RANG d'un élément d'un ensemble ordonné E est une notion définie dès que E n'admet aucune transformation en lui-même, qui, sans changer la loi d'ordination de E, conserverait le sens de l'inégalité ordinale de tout couple d'éléments de E.

Exemple. — P étant un ensemble parfait totalement discontinu linéaire, E ordonné dans le sens des abscisses croissantes est formé de n points sur l'intervalle contigu u_n à P et de points empruntés à P.

Un ensemble bien ordonné E satisfait à cette condition. Pour un ensemble de cette nature la notion de rang est plus générale que celle de

---

(2) *Comptes rendus*, **212**, 1941, p. 886.

type d'ordination T(E). Car celle-ci n'est l'invariant commun qu'aux ensembles semblables à E, tandis que celle de rang d'un élément a de E est invariante pour tous les éléments a' d'ensembles bien ordonnés E', a' étant homologue de a dans l'application non seulement de E sur E' semblable à E, mais aussi de E sur un segment de tout E' plus étendu que E, ou enfin d'un segment de E contenant a sur un segment semblable de E', dès que E' admet un tel segment.

Le *nombre ordinal* est ce qui qualifie le rang d'un élément d'un ensemble bien ordonné. C'est la plus grande source de complications purement artificielles de la théorie du transfini, que de confondre les deux notions du nombre ordinal et du type de bonne ordination. 10 qualifie le rang de l'élément qui vient après le neuvième. 10 n'est pas la manière de ranger sur une file une collection d'objets (dont le nombre cardinal est 10).

On utilise des nombres ordinaux négatifs ou nuls. Le nombre ordinal [illegible]prement dit est *positif* ($\geqq 1$). Nous l'appelons *arithmétique*, par [illegible]mbre ordinal *algébrique* (négatif) ou *semi-arithmétique* (0). [illegible]mée des *nombres ordinaux finis arithmétiques* ou [illegible]*port le α^e rang est α*. A la rigueur pourrait-on identifier le [illegible]nal de (O) à son rang.

Voici à quoi se [illegible] le théorème de Zermelo quand on évite de l'obscurcir par l'ambiguïté de sens du nombre ordinal, tantôt rang et tantôt type d'ordination :

« ϖ désignant la puissance d'un ensemble déterminé E et S_ϖ l'ensemble des nombres ordinaux égaux aux rangs d'éléments d'ensembles bien ordonnés de puissance au plus égale à ϖ, la puissance de S_ϖ ne peut pas être au plus égale à ϖ ».

En effet, soit λ le plus petit nombre ordinal supérieur à tous les nombres de S_ϖ. D'après la définition d'un nombre de S_ϖ, il est évident que si a appartient à S_ϖ, tout nombre inférieur à a est aussi dans S_ϖ. Donc S_ϖ est le segment de λ; S_ϖ accru de λ est bien ordonné. Il a même puissance que S_ϖ. Si cette puissance était au plus égale à ϖ, λ serait dans S_ϖ, ce qui est absurde.

La démonstration habituelle si laborieuse ne contient rien de plus que ce qui précède.

III. Les types de bonne ordination s'ordonnent par la condition : $T \prec T'$ si un ensemble de type T est semblable à un segment d'un ensemble de type T'. Dès lors, ces types sont bien ordonnés et chacun possède un rang. Le premier T_1 est le type de (a_1), le $n^{\text{ième}}$, soit T_n, est le type de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ordonné dans le sens des indices croissants, le premier venant après tous ceux-là, soit T_ω, est le type de $(a_1, a_2, \ldots)$.

Quel que soit α transfini, T_α est le type du segment $S(\alpha, O)$ *de α dans* (O). *Si α est fini, T_α est le type de* $S(\alpha + 1, O)$.

Les segments d'un ensemble de type T_α forment un ensemble de type T_α si α est transfini, de type $T_{\alpha-1}$ si α est fini. Ce n'est pas en appelant zéro le nombre 1 et en considérant le segment *néant* (relatif à a_1) que l'on efface une différence de nature irréductible. Celle-ci apparaît encore dans le produit des ordinations.

Ajouter deux types d'ordination T et T′, c'est former le type de l'ensemble obtenu en plaçant bout à bout un ensemble de type T suivi d'un ensemble de type T′. Le produit $T \times T'$ est le type de l'ensemble obtenu en substituant à tout élément d'un ensemble de type T′ un ensemble de type T. Soit E_α un ensemble bien ordonné ayant un dernier élément de rang α, et G_α un ensemble de type T_α. Donc, si α est fini, E_α et G_α sont échangeables. Si α est transfini, E_α est un $G_{\alpha+1}$. Cantor définit avec raison $\alpha+\beta$ et $\alpha\times\beta$ par les conditions

$$T_\alpha + T_\beta = T_{\alpha+\beta}, \qquad T_\alpha \times T_\beta = T_{\alpha\times\beta}.$$

On trouve alors que $T(E_\alpha)+T(E_\beta)=T(E_{\alpha+\beta})$,
et, *si* β *est fini*,

$$T(E_\alpha)\times T(E_\beta)=T(E_{\alpha\times\beta}),$$

mais *si* β *est transfini*,

$$T(E_\alpha)\times T(E_\beta)=T(E_{\alpha\times\beta+\alpha})\neq T(E_{\alpha\times\beta}).$$

PHYSIQUE. — *Sur la représentation d'une fonction expérimentale par une fraction rationnelle.* Note de M. **Pierre Vernotte**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons exposé [1] une méthode de représentation d'une loi expérimentale, assez fidèle pour permettre la dérivation, au moyen d'une courbe définie par une expression analytique. L'expression choisie est la dérivée du quotient, par un polynome de degré $(n+1)$, d'un polynome de degré n (pratiquement $n=1$), à laquelle on ajoute une constante. La détermination des coefficients se fait en identifiant, dans chacun des intervalles partiels en lesquels on a partagé, à cet effet, l'intervalle expérimental, la valeur moyenne $\overline{Y}$ de l'expression analytique, et celle $\overline{y}$ de la fonction expérimentale.

---

(1) *Comptes rendus*, **210**, 1940, pp. 329 et 475; **211**, 1940 p. 134.

I. Les intervalles partiels étant choisis, il faut déterminer les valeurs moyennes $\overline{y}$. Chaque intervalle partiel étant partagé en bandes, on groupe ces bandes par 2, 3, ou 4, comme nous l'avons expliqué, et par les formules que nous avons données ou rappelées, on calcule l'aire de chaque groupe; d'où se déduit l'aire de l'intervalle partiel, et, partant, $\overline{y}$.

Si les ordonnées expérimentales sont équidistantes, le calcul est assez simple. Le groupement des ordonnées par 2 donne sensiblement le même résultat (si les mesures sont très précises) que le groupement par 4, moins simple. On peut aussi choisir, au milieu de l'intervalle partiel, un groupe de 2 bandes, lequel est limité par un arc de parabole passant par 3 points expérimentaux consécutifs, et lui adjoindre progressivement, de chaque côté, une nouvelle bande, limitée par un arc de parabole défini par la condition de passer par le nouveau point expérimental correspondant, et être tangent à l'arc précédent à son extrémité. Le calcul montre que l'on obtient ainsi la même valeur moyenne $\overline{y}$ que si l'on s'était contenté de juxtaposer des groupes de 2 bandes (ce qui équivalait à joindre les points expérimentaux 3 par 3, au moyen d'arcs de paraboles non raccordés). On se contentera donc, d'ordinaire, de quarrer l'intervalle partiel au moyen de groupes de 2 bandes, complétés, si le nombre des bandes est impair, par un groupe de 3 bandes.

Si les ordonnées expérimentales ne sont pas équidistantes, le maniement des formules devient très pénible. Il est plus simple alors de joindre sur un graphique à grande échelle, les points expérimentaux par une ligne sinueuse, aussi peu arbitraire que possible, et d'en déduire les valeurs d'ordonnées d'abscisses équidistantes, en nombre voisin de celui des points expérimentaux. Nous avons contrôlé, sur des exemples numériques, que ce procédé, beaucoup plus pratique, était équivalent à l'usage rigoureux de la méthode.

Si, au lieu de former une suite, les points expérimentaux forment un véritable nuage, il suffit de grouper arbitrairement ces points en un certain nombre de suites où ils sont joints par des lignes éventuellement sinueuses, dont on prend la ligne moyenne. Nous avons contrôlé, en effet, dans des nuages formés, soit de suites régulières superposées, soit de points pris au hasard, qu'en groupant différemment ces points en lignes *plus* ou *moins* sinueuses et *moins* ou *plus* nombreuses, à la ligne moyenne desquelles on appliquait les formules de quadrature expérimentale rappelées ci-dessus, on obtenait toujours sensiblement la même valeur moyenne.

II. Sachant calculer commodément les valeurs moyennes, on veut

calculer commodément les coefficients de l'expression

$$M + d[(Ax + B) : (x^2 + Cx + D)] : dx.$$

On y arrive par les algorithmes suivants (que nous avons, d'autre part, généralisés pour le cas d'une représentation comportant 7 paramètres au lieu de 5).

Les intervalles partiels étant limités par les abscisses $x_0 = 0$, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, et les valeurs moyennes expérimentales étant $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, $\overline{y_3}$, $\overline{y_4}$, $\overline{y_5}$, on pose ($i \geqq 2$)

$$p_i = (\overline{y_i} - \overline{y_{i-1}}) : (x_i - x_{i-2}),$$
$$\delta_i = p_i - p_{i-1},$$
$$\sigma_i = (x_{i-3}\sigma_{i-1} + \delta_i) : x_i \qquad (i \geqq 3;\quad \sigma_3 x_3 = \delta_3),$$
$$\Delta_i = \sigma_i - \sigma_{i-1},$$

C et D sont alors donnés immédiatement par les systèmes à deux inconnues

$$\delta_4 C + \Delta_4 D = x_1 p_3 - x_4 p_4,$$
$$\delta_5 C + \Delta_5 D = x_2 p_4 - x_5 p_5.$$

D'où découlent successivement M, B et A :

$$M = \overline{y_3} + (C + x_1)p_3 + D\sigma_3,$$
$$-B : D = x_1(\overline{y_1} - M) + (C + x_2)(\overline{y_2} - M) + Dp_2,$$
$$A = (C + x_1)B : D + (x_1^2 + Cx_1 + D)(\overline{y_1} - M).$$

Les calculs numériques, qui doivent être extrêmement précis, sont faits, par exemple, à la table de logarithmes à 7 décimales.

III. Le type d'expression analytique adopté semble bien choisi; mais il paraît n'avoir aucune signification profonde. A 5 paramètres, il convient pour représenter une fonction expérimentale paraissant se rapprocher d'une asymptote horizontale, et présentant, au plus, deux maximum ou minimum, et trois points d'inflexion.

Nous l'avons appliqué à des expériences de convection, très soignées, de notre collaborateur M. Jules Fleury, où s'observait une variation de température admettant d'abord un maximum, puis un point d'inflexion, et enfin une asymptote horizontale; ainsi qu'à des expressions analytiques de types très variés, présentant cette même allure.

L'approximation obtenue est très remarquable, mais ne dépasse pas ce que réclament de très bonnes expériences de physique (du millième au dix-millième). Le type de stylisation choisi ne présenterait aucun intérêt dans une question de mathématiques.

CHIMIE MINÉRALE. — *Oxydes supérieurs de bismuth et bismuthates.* Note de M. **Henri Martin-Frère**, présentée par M. Paul Lebeau.

Nous avons effectué depuis un an un ensemble de recherches sur les composés oxygénés supérieurs du bismuth et en particulier les bismuthates.

En 1906, Gutbier et Bünz ([1]) avaient déjà tenté d'isoler ces composés, mais leurs conclusions ne comportaient rien de définitif.

Une publication récente de Scholder et Stobbe ([2]) nous incite à faire connaître l'état actuel de nos travaux dont les résultats se rapprochent de ceux de ces auteurs, bien que les méthodes de préparation employées ne soient pas absolument identiques. Alors que ces auteurs semblent avoir surtout utilisé comme agent oxydant l'hypochlorite de sodium, nous avons préféré opérer avec le persulfate de sodium qui nous a donné de très bons résultats. D'autres moyens d'oxydation, eau oxygénée en milieu alcalin ou ammoniacal, ont fourni de faibles rendements.

L'oxydation par le persulfate de sodium de l'hydroxyde de bismuth $Bi(OH)^3$ en suspension dans la soude bouillante et concentrée, de titre compris entre 45 et 62 %, nous a toujours conduit à des précipités fortement chargés en alcalis et incomplètement oxydés. Un second traitement au persulfate ne permet pas d'augmenter sensiblement l'oxygène actif.

Si l'on traite l'hydroxyde de bismuth en solution dans la soude concentrée à 60 % à l'ébullition par une solution chaude et concentrée de persulfate de sodium, on peut isoler un précipité jaune orangé fortement oxydant qui, par dilution dans une grande quantité d'eau froide, se sépare complètement. Ce précipité, lavé plusieurs fois à l'eau froide jusqu'à réaction neutre et séché sous vide sulfurique, possède la composition centésimale ci-dessous :

	Trouvé. I.	Trouvé. II.	Trouvé. III.	Théorie pour BiO^3Na.
Bismuth (%)...........	73,4	72,8	75,5	74,6
Oxygène actif...........	5,5	5,47	5,25	5,7
Sodium................	9,52	9,1	8,6	8,2

La formule BiO^3Na peut donc être admise.

([1]) *Z. anorg. Chem.*, **48**, 1906, p. 162 et 294; **49**, 1906, p. 432; **50**, 1906, p. 210; **52**, 1907, p. 124.

([2]) *Z. anorg. Chem.*, **247**, 1941, p. 392.

La décomposition du bismuthate de sodium en milieu acide dilué nous a permis d'isoler le tétroxyde de bismuth Bi^2O^4. Mais nous n'avons en aucun cas réussi à séparer de l'acide bismuthique BiO^3H ou de l'anhydride bismuthique Bi^2O^5. Ces composés ne nous semblent pas exister à l'état libre. Dans nos expériences, le bismuthate de sodium, traité par l'acide nitrique à 5 % à 0° pendant 12 heures, a donné un résidu correspondant sensiblement à Bi^2O^4 mais renfermant encore de petites quantités d'alcalis.

Au point de vue de leurs propriétés, les bismuthates sont des corps très oxydants qui libèrent facilement leur oxygène actif en milieu acide. Ils sont un peu solubles dans les alcalis concentrés, libèrent quantitativement le chlore de l'acide chlorhydrique et transforment intégralement l'acide arsénieux en solution chlorhydrique en acide arsénique. Le sulfate manganeux en solution sulfurique est oxydé à froid par le bismuthate en permanganate. Cette réaction permet de suivre qualitativement le pouvoir oxydant au cours des préparations.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur une préparation synthétique des 3.alcoyl- ou arylcyclohexènes-1*. Note de M. **André Berlande**.

La préparation d'un 3.alcoyl- ou arylcyclohexène-1 s'effectue habituellement par déshydratation d'un cyclohexanol, ou par enlèvement d'hydracide halogéné au dérivé monohalogéné d'un carbure cyclohexanique. Elle fournit un mélange de carbures cyclohexéniques dont la séparation est, sinon impossible, du moins fort laborieuse.

Je me suis adressé pour réaliser cette préparation au 3.chloro- ou bromocyclohexène-1, que l'on sait obtenir, à l'état pur depuis les travaux de Crossley (1), Hofmann et Damm (2), Courtot et Pierron (3). *A priori*, en effet, leur structure et leur activité chimique s'apparentent à celles des halogénures d'allyle; j'ai par suite envisagé l'application à ces dérivés du cyclohexène de la méthode utilisée par Tiffeneau (4) et par Kirrmann (5) dans le cas des halogénures allyliques.

(1) *J. Chem. Soc. London*, 85, 1904, p. 1422.
(2) *Schlesisches Kohlenforschungsinstitut. Chem. Zentr.*, 1926, p. 234.
(3) *Bull. Soc. Chim.*, 4e série, 45, 1929, p. 288.
(4) *Comptes rendus*, 139, 1904, p. 481.
(5) *Bull. Soc. Chim.*, 4e série, 39, 1926, p. 988.

La condensation du 3.chloro- ou bromocyclohexène-1 avec un composé organomagnésien s'effectue très facilement, même à — 15°, mais elle est complexe, et il importe de se placer dans des conditions de concentration et de température soigneusement délimitées si l'on veut donner une part prépondérante à la réaction

$$X—Mg—R + X—C^6H^9 = X^2Mg + R—C^6H^9.$$

Une élévation de température, une augmentation de concentration favorisent l'arrachement d'hydracide halogéné, avec formation, d'une part de cyclohexadiène-1.3, d'autre part de carbure RH, et aussi de produits plus complexes.

Dans la solution éthérée de l'halogénure d'alcoyl- ou d'arylmagnésium (préparée par exemple avec 1/3 at-g de magnésium et 1/3 mol-g d'alcoyl- ou d'arylhalogène dans 150^{cm^3} d'éther), solution maintenue au voisinage de 0° et constamment agitée, on verse, peu à peu, après dosage de la teneur en magnésien, la quantité équivalente d'halogénure cyclohexénique. On abandonne ensuite une demi-heure à la température du laboratoire, puis l'on traite suivant les méthodes habituelles.

Le carbure cyclohexénique séparé par distillation est parfois souillé d'halogénure. On se débarrasse de la majeure partie de ce dernier en entraînant le carbure à la vapeur d'eau. Une ébullition prolongée en présence de sodium, suivie d'une rectification, fournit un carbure passant à point fixe.

Le rendement atteint 70 %. Il s'est formé, en outre, en proportion croissante avec la température, du cyhlohexadiène-1.3, et du bicyclohexényle.

Voici quelques-uns des carbures isolés à l'état pur, et caractérisés par diverses réactions. La position de la double liaison a été contrôlée par oxydation nitrique ou permanganique.

3.*Méthylcyclohexène*-1. — C'est le seul homologue en 3 du cyclohexène antérieurement isolé à l'état pur. Godchot, Mousseron et Granger (6) l'ont séparé de l'isomère 4 par des fractionnements très soignés. Ils indiquent les constantes E_{760} 104°; d^{14} 0,803; n^{14} 1,4459. Après un seul fractionnement, le carbure que j'ai préparé passe entièrement entre 103° et 104°; d^{26} 0,799; n^{26} 1,4332. Le dérivé dibromé, formé en solution chloroformique à — 10°, a pour constantes : E_{35} 130°; d^{28} 1668; n^{28} 1,5370. L'oxy-

(6) *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 480.

dation permanganique fournit de l'acide α-méthyladipique fondant à 63°.

3. *Éthylcyclohexène*-1. — E_{760} 131°,5; d^{26} 0,810; n^{26} 1,4490. Son dérivé d'addition dibromé a pour constantes E_{45} 153°; d^{28} 1,590; n^{28} 1,5332. Chauffé, en solution dans l'alcool absolu, avec de l'éthylate de sodium, il fournit un éthylcyclohexadiène E_{760} 136-137°; d^{28} 0,840; n^{28} 1,4780. L'oxydation nitrique donne de l'acide α-éthyladipique F 48°.

3. *Phénylcyclohexène*-1. — E_{760} 235°; d^{26} 0,967; n^{26} 1,5440. Son dérivé d'addition dibromé se décompose partiellement, lors de la distillation, même sous pression réduite, en libérant de l'acide bromhydrique. Le phénylcylohexadiène engendré, après recristallisation dans l'alcool, fond à 66°. L'oxydation permanganique du phénylcyclohexène fournit de l'acide phénylvalérianique F 58°, et un diacide, probablement l'acide α-phényladipique, non signalé jusque là.

Le spectre Raman de tous les carbures obtenus fera l'objet d'une étude spéciale.

GÉOLOGIE. — *Sur la transgression mésocrétacée et l'évolution de la chaîne hercynienne sud-marocaine, à travers le Secondaire.* Note de M. **Georges Choubert**, présentée par M. Charles Jacob.

On sait que la grande chaîne hercynienne de l'Anti-Atlas, qui s'étend de l'Atlantique jusqu'en Algérie en passant sous la Hammada du Guir, a été soumise à une évolution continentale dès sa surrection, c'est-à-dire dès la fin des temps primaires. Roch, Moret, Neltner, Dresch, Dubar, Menchikoff et moi-même avons étudié, dans des secteurs différents, les dépôts permo-triasiques et jurassiques de la région atlasique, ainsi que l'allure et les limites de leurs transgressions, dont aucune n'a dépassé le bord Nord du socle saharien, formé par l'Anti-Atlas. Des faciès côtiers se développent le long de cette ligne et prennent une importance variable suivant les étages et les points considérés.

Au Sud de ces anciens rivages, l'évolution continentale s'est poursuivie sans interruption, le soulèvement progressif du pays résultant sans doute de la compensation isostatique des matériaux enlevés par l'érosion. On n'a aucune donnée précise sur cette évolution durant le Trias et le Jurassique. Seule, la reconstitution de la surface de base du Crétacé et des contours des bassins créés par la transgression mésocrétacée permet d'entrevoir ce que fut cette longue histoire continentale. Appuyée sur les travaux de

Bondon, Bourcart, Clariond et des auteurs cités plus haut, une telle reconstitution conduit aux conclusions suivantes :

1° La transgression mésocrétacée n'a jamais recouvert la chaîne hercynienne anti-atlasique. Au Nord, ses dépôts forment le bassin atlasique qui s'étalait sur l'emplacement du Haut-Atlas; au Sud, ils constituent de même le bassin grossièrement elliptique de la Hammada de Taouz ainsi qu'un golfe, ouvert sur l'Atlantique, situé à l'embouchure du Drâ.

2° Le bassin atlasique et celui de la Hammada sont tous les deux bordés par des dépôts côtiers, et ce n'est qu'à une certaine distance des anciens rivages que la série mésocrétacée devient normale avec ses trois termes classiques : grès rouges infra-cénomaniens, marnes à gypse cénomaniennes et calcaires cénomano-turoniens. Les dépôts subcôtiers, puis côtiers, sont caractérisés par : *a*. une diminution graduelle de la puissance de ces trois termes; *b*. la fusion des deux termes inférieurs, en une seule série rouge argilosableuse, qui finit elle-même par disparaître complètement; *c*. le passage progressif du puissant complexe terminal des calcaires à silex massifs et fossilifères à une couche peu épaisse de calcaires souvent bréchoïdes et manganésifères.

Ce Crétacé côtier, réduit et peu résistant, est presque partout détruit par l'érosion, ce qui rend difficile la reconstitution des anciens rivages. Au Nord, on le trouve conservé dans les buttes témoins de Tifnout, dans la région d'Imini, celle d'Imiter, ainsi que sur les deux côtés de la Hammada du Guir qui l'a préservé de la destruction (Hassi Beraber et Tiberbatine). En s'éloignant de ces points vers le Nord, on passe à la série des gypses, classique, évoquée plus haut, déposée de plus en plus loin des côtes. Sur le pourtour du bassin de la Hammada, les faciès côtiers sont largement développés au Sud de Ktaoua (coude du Drâ). On les retrouve après une courte disparition sous la Hammada du Drâ, à Zegdou, à Chefaïa (Oued Daoura), aux Gour Goudiane etc. L'érosion les a presque complètement détruits le long du rivage nord de ce bassin. On doit les retrouver au Teniet Kseir où le Crétacé disparaît sous la Hammada du Guir.

3. Malgré la durée de l'évolution continentale, la surface recouverte par le Crétacé, au lieu d'être une pénéplaine parfaite, présente une topographie assez accusée. Ce sont tantôt des dépressions remblayées par les grès rouges infracénomaniens, dont l'épaisseur est, de ce fait, très variable, tantôt des crêtes formées par des roches résistantes (quartzites ou calcaires), qui n'ont été recouvertes que par les calcaires cénomano-turoniens, ou bien sont toujours restés émergées. Exemples : Rich M'Bidia au Sud du Ktaoua

(Dévonien) portant une pellicule de calcaire cénomano-turonien; flanc sud de l'anticlinal de Tafenna à l'Est du Ktaoua (Ordovicien) avec ses buttes témoins de Crétacé; Djebel Ouçada près de Zegdou (Ordovicien) etc.

L'étude des bassins crétacés, de leur faciès et de la configuration de la surface précrétacique permettent de se représenter la chaîne de l'Anti-Atlas, jusqu'à Colomb Béchar, comme ayant formé, durant tout le Secondaire, une zone de reliefs plus ou moins accusés. Au Jurassique, elle séparait les deux pénéplaines atlasique et saharienne; au Crétacé, les deux bassins marins.

Il est peu probable que ce relief, imparfaitement raboté, puisse être le résultat d'une seule phase d'érosion ininterrompue depuis la fin du Primaire. Il est beaucoup plus vraisemblable, au contraire, qu'un ou plusieurs soulèvements tectoniques ou isostatiques aient provoqué des reprises d'érosion. Tel serait par exemple le soulèvement contemporain de la phase dite antécénomanienne du Haut-Atlas, que P. Fallot appelle *deuxième phase* (1), et qui se place entre l'Oxfordien et le Kiméridgien.

De même, la trangression mésocrétacée semble être, non pas une simple avancée marine sur une pénéplaine abaissée par des mouvements verticaux, mais une conséquence directe d'une nouvelle action des forces tangentielles, qui ont provoqué un nouveau soulèvement du pli de fond hercynien, compensée par la formation de deux zones d'abaissement le bordant au Nord et au Sud. Cependant, au lieu d'être une zone de subsidence à sédimentation profonde dont les rivages moulent le bord Nord du socle africain, comme le fait la fosse jurassique, le bassin atlasique crétacé est franchement épicontinental, caractérisé par des dépôts lagunaires et néritiques. Il s'étale beaucoup plus loin au Sud que la mer jurassique, et ses rivages, quoique également orientés OSO-ENE, peuvent localement atteindre la zone axiale de la chaîne hercynienne.

GÉOLOGIE DYNAMIQUE. — *Sur quelques applications géologiques de la théorie de l'élasticité*. Note de M. **Pierre Despujols**, présentée par M. Charles Jacob.

L'étude des propriétés élastiques du sol nous a fourni des conclusions qui peuvent intéresser les géologues.

Considérons des terrains soumis en profondeur à une pression P, résultant

(1) P. Fallot, *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 648.

de leur poids et, le cas échéant, de forces tectoniques. Supposons, pour la commodité de l'exposé, cette pression verticale. Si nous creusons dans la roche, supposée homogène et isotrope, une cavité de forme arrondie, il semble que la paroi de la voûte sera toujours distendue au sommet et au voisinage du sommet. Nous avons fait le calcul dans quelques cas particuliers : la tension est égale à P dans une galerie circulaire, à 0,59 P dans une cavité sphérique, à 0,33 P dans une cavité parabolique à axe vertical. Dans une galerie, la largeur de la zone distendue est égale au rayon ; dans les autres cas, le diamètre de la calotte distendue vaut 1,20 fois le rayon de la sphère, et 1,63 fois le paramètre du paraboloïde. Ce dernier exemple est particulièrement intéressant, car les dômes dessinés par la surface des batholites ont une forme qui rappelle plus ou moins celle d'un paraboloïde de révolution.

Si nous introduisons un fluide dans la cavité, la pression intérieure pourra réduire la dilatation des terrains; elle pourra même la changer en compression ; elle pourra, au sens usuel des termes, soutenir le toit, mais elle augmentera la tension horizontale déjà positive.

Il résulte de là que, si la profondeur de la cavité ou la pression du fluide est suffisante, la voûte sera rompue et le fluide sera injecté dans les terrains.

Nous pouvons remplacer le fluide par une masse pâteuse, à condition qu'au repos, c'est-à-dire en l'absence de frottements dus à la vitesse, cette masse transmette les pressions conformément au principe de Pascal.

L'origine des filons éruptifs peut donc s'expliquer par la rupture du toit des massifs de moyenne profondeur. Aux grandes profondeurs, nous ignorons, malgré ce que peut apprendre la transmission des ondes sismiques, si les roches jouissent des mêmes propriétés élastiques que les corps solides.

D'autre part, quand un tel massif se solidifie et que la différenciation du magma se poursuit, le phénomène mécanique limite est le contact d'une roche élastique et d'un résidu fluide. Mais cette limite n'est généralement pas atteinte, car l'équilibre élastique ne peut s'établir suivant une surface de contact différant sensiblement d'une surface plane. Il y a donc rupture du massif solidifié, ou en cours de solidification, et départ du résidu, comme il y a départ des scories dans une éponge de fer battue à la forge. Telle est l'*origine* des filons proprement dits, abstraction faite des phénomènes thermiques, qui pourront faire l'objet de considérations ultérieures.

La même remarque s'applique à la migration des huiles minérales. A

moins de constituer avec la roche une seule et même phase, l'huile ne peut séjourner dans une couche élastique homogène soumise à une pression suffisante. Elle monte donc à travers les terrains, soit pour imprégner une couche hétérogène, soit pour se répandre à la surface du sol sous forme de suintement.

Passons à l'*extension* des fissures et des filons. Le calcul de la tension aux extrémités d'une fente conduit à une valeur infinie, que le terrain soit distendu ou que la fente soit remplie d'un fluide sous pression. Les fissures et les filons s'étendent donc tant que l'une ou l'autre cause subsiste.

Les fissures tectoniques rentrent dans le cadre de la tectonique générale, et, spécialement, de la tectonique du granite. De plus leur extension est stable, car toute tendance accidentelle à la déviation est aussitôt corrigée par la naissance d'une tendance inverse.

Il en va autrement des filons ouverts par la pression des fluides : ils sont en relation avec des phénomènes profonds; et, d'après le calcul, leurs déviations accidentelles se corrigent d'autant moins qu'elles se produisent plus près de la surface du sol.

Si les fissures et les filons sont dus à des forces horizontales, les failles s'*étendent* sous l'action de forces verticales, d'efforts tranchants pour employer le langage de la résistance des matériaux. Comme pour les fissures d'origine tectonique, le phénomène est stable.

Il ne semble pas qu'une faille puisse s'amorcer sous l'action des forces superficielles de gravité. Si l'on assimile en effet une chaîne de montagnes à un parallélépipède rectangle, dont la section repose sur la plaine suivant un segment de droite AB, hypothèse favorable à la fatigue des terrains, on constate que les surfaces d'égale compression appartiennent à des cylindres de révolution dont les directrices passent par A et B, et que la compression, maximum le long du contact, décroît, de cylindre à cylindre, pour s'annuler à la surface de la plaine. Il n'y a pas, dans la limite des réactions élastiques, tendance au cisaillement.

En fait, l'*origine* des failles échappe à la théorie de l'élasticité; on se la représente aisément comme la suite de déformations permanentes notables : flexures résultant de la rémission des forces tectoniques tangentielles, ou refoulements produits en profondeur par l'exagération de ces forces.

HYDROGÉOLOGIE. — *Niveau d'eau sous pression aux points bas du contact des terrains perméables recouverts par des terrains imperméables.* Note de M. **Albert Robaux**, présentée par M. Charles Jacob.

Des études géologiques et hydrologiques, aussi bien en France qu'en Afrique du Nord, m'ont permis de constater qu'il existe souvent, pour ne pas dire toujours, une ou plusieurs sources d'allure artésienne, à l'endroit précis où, dans un pli monoclinal, un terrain imperméable commence à recouvrir un terrain perméable.

On sait que, lorsqu'un terrain imperméable recouvre, en concordance ou en discordance, un terrain perméable qui disparaît en profondeur, à une certaine distance des affleurements se trouve une nappe d'eau sous pression qu'on a coutume de rechercher par sondage. L'eau est souvent artésienne, toujours ascendante.

Dans l'ensemble de ce dispositif, il existe un point singulier, le point le plus bas en surface du contact entre le terrain perméable et le terrain imperméable. En ce point on trouve presque toujours une source artésienne, à moins que celle-ci ne reste cachée sous les alluvions.

Lorsque plusieurs vallées coupent un tel dispositif assez étendu, l'eau tend à sortir surtout vers le point le plus bas du contact, mais il peut y avoir d'autres émergences à proximité des vallées importantes. Lorsque la vallée est remplie d'alluvions, tout puits, ou toute galerie atteignant ces points rencontre souvent des venues d'eau. Le débit est fonction des facteurs habituels.

Comme exemples on peut citer : les sources la bordure Sud-Est du Bassin de Paris [1] (Crétacé marneux recouvrant les calcaires du Portlandien), les sources du Nord du Bassin de l'Aquitaine (Jurassique moyen imperméable sur les calcaires sous-jacents), les sources au Nord et au Sud des chaînes anticlinales du Moyen Atlas, du Grand Atlas, et de l'Atlas au Maroc; les sources de Miliana au flanc du Zaccar en Algérie (Gault argileux sur les calcaires néocomiens), les sources du Sud-tunisien (Crétacé marneux sur calcaires kimméridgiens) etc.

Il s'agit d'expliquer ce fait que j'ai souvent observé, mais qui paraît assez peu connu.

L'hypothèse la plus simple voudrait que l'eau déborde tout simplement

---

(1) A. Robaux, *Congrès International des Mines, Métallurgie et Géologie Appliquée, Section Géologie Appliquée*, Paris, 1935, p. 683-690.

en ce point bas, c'est-à-dire que les terrains aquifères soient gorgés d'eau et que tout apport nouveau, arrêté par les terrains imperméables, coule par le déversoir naturel de la vallée. Dans le détail, la manière d'être de l'eau en ce point précis est cependant plus compliquée, car il n'y a pas remplissage complet des vides du terrain aquifère : certains sondages, qui sont descendus à 80^{m} sous une source artésienne toute proche sans trouver d'eau, l'ont démontré. Il faut donc penser que seules certaines fissures sont remplies et que, l'écoulement en profondeur selon ces fissures étant ralenti ou impossible, l'eau nouvelle provoque alors le dégorgement.

Le mécanisme depuis l'amont jusqu'à l'aval du point d'émergence qui aurait la cote 0, serait alors le suivant : En amont, dans tout le bassin hydrogéologique, certaines fissures ou diaclases, ou même certaines couches, drainent les eaux d'infiltration. Le pendage règle l'écoulement de l'eau; mais la pression peut être considérée comme nulle, puisque les fissures, sans doute anatomosées, peuvent faire communiquer l'air extérieur et les zones aquifères. Cheminant ainsi, l'eau se présente à la cote 0. En dessous de cette cote, les vides sont plus ou moins remplis d'une eau dont, à partir de ce moment, l'écoulement est très lent, par suite des pertes de charge, de l'absence de pression et aussi d'issues vers l'aval. De ce fait l'eau tend à emprunter les passages plus faciles qui s'offrent à elle vers l'air libre ou les alluvions de la vallée; *elle se met légèrement en charge* et émerge au point le plus bas avec des caractères d'eau artésienne. En dessous de la cote 0, la pression augmente de plus en plus, les moindres fissures sont alors remplies; tous les sondages sont alors productifs, ce qui n'est pas forcément le cas aux environs de la cote 0, où la pression, faible ou nulle, ne permet pas une imbibition totale.

Parfois, avant d'émerger à la surface, l'eau des sources artésiennes suit un parcours souterrain assez long; elle peut alors se réchauffer et apparaître avec une température légèrement supérieure à la normale. Dans ce cas, le débit reste en général constant; au contraire les grosses sources froides, c'est-à-dire celles dont l'eau vient plus directement du versant d'absorption vers l'air libre, sont sujettes à des variations de débit comme les simples sources d'émergence.

En définitive, une loi semble pouvoir s'énoncer sous la forme suivante :

Quand un terrain perméable, affecté d'un pendage, disparaît en profondeur sous un terrain imperméable, concordant ou non, on constate, aux environs des points bas principaux de ce contact, et surtout aux points les plus bas qui sont les passages des vallées importantes, une zone d'eaux à

allure artésienne qui sont les émergences d'une nappe imbibant tout ou partie du terrain perméable. Le débit de ces points d'eau est fonction des différents facteurs habituels.

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Polygalacées. Développement de l'embryon chez le* Polygala vulgaris *L.* Note de M. **René Souèges**, présentée par M. Pierre-Augustin Dangeard.

L'embryon du *Polygala vulgaris* vient encore se ranger, à côté de celui des Rhamnacées, dans le cycle de formes qui se développent selon le type embryonomique du *Geum urbanum* (¹). Les données embryogéniques se montrent, par là, d'accord avec les conclusions des systématiciens qui, pour la plupart, placent au voisinage de l'alliance des Célastrales ou Frangulinées, de laquelle font partie les Rhamnacées, celle des Sapindales ou Æsculinées, à laquelle appartiennent les Polygalacées.

La paroi de segmentation dans la cellule apicale (*fig.* 1) est normalement verticale (*fig.* 4), quoique apparaissant fréquemment inclinée sur l'axe (*fig.* 3). Elle est suivie de deux autres parois, plus ou moins nettement verticales, qui séparent quatre quadrants dont les noyaux se rangent à peu près dans le même plan horizontal (*fig.* 5, 6, 7, 8). Pendant ce temps, la cellule basale se segmente transversalement pour engendrer deux cellules superposées, *m* et *ci* (*fig.* 2), qui se divisent peu après, à leur tour, *m* verticalement et *ci* transversalement (*fig.* 4, 5). Ainsi se constituent, par bipartitions successives, une tétrade en T, puis un proembryon octocellulaire à quatre étages.

Les quatre quadrants ne se cloisonnent pas tous de la même manière. A cet égard, les plus grandes analogies peuvent être établies avec ce qui se passe chez le *Geranium molle* (²). Deux d'entre eux, par exemple l'antérieur droit et le postérieur gauche (*fig.* 11 et 12), se segmentent à peu près transversalement pour donner deux éléments superposés l et l', tout à fait comparables à des octants, tandis que les deux autres se divisent par des parois à peu près verticales, parallèles aux parois méridiennes, pour engendrer deux cellules juxtaposées, l'une voisine de l'axe c, d'apparence quadrangulaire, l'autre périphérique c', d'apparence triangulaire. Ces cloisons se montrent parfois très inclinées, formant avec l'axe un angle voisin de 45° (*fig.* 13 et 14). Il résulte de ce mode de cloisonnement des quadrants, que les coupes longitudinales du proembryon, aux stades suivants, offrent des aspects différents : si elles passent par un plan méridien coupant par leur milieu les deux quadrants segmentés transversalement, elles laissent apparaître au sommet un groupe épiphysaire, produit par les deux

(¹) R. Souèges, *Comptes rendus*, 174, 1922, pp. 1070 et 1197; 200, 1935, p. 1972; *Bull. Soc. bot. Fr.*, 70, 1923, p. 645.

(²) R. Souèges, *Comptes rendus*, 177, 1923, p. 556.

éléments l, symétriquement construit (*fig.* 17 et 19); si elles passent par un plan méridien, formant avec le précédent un angle de 90°, elles ne présentent pas au sommet du groupe épiphysaire nettement différencié (*fig.* 10, 15, 18, 22); enfin si elles sont comprises dans un plan intermédiaire, orienté à 45° environ sur les deux précédents, elles offrent une cellule épiphysaire asymétriquement disposée, correspondant

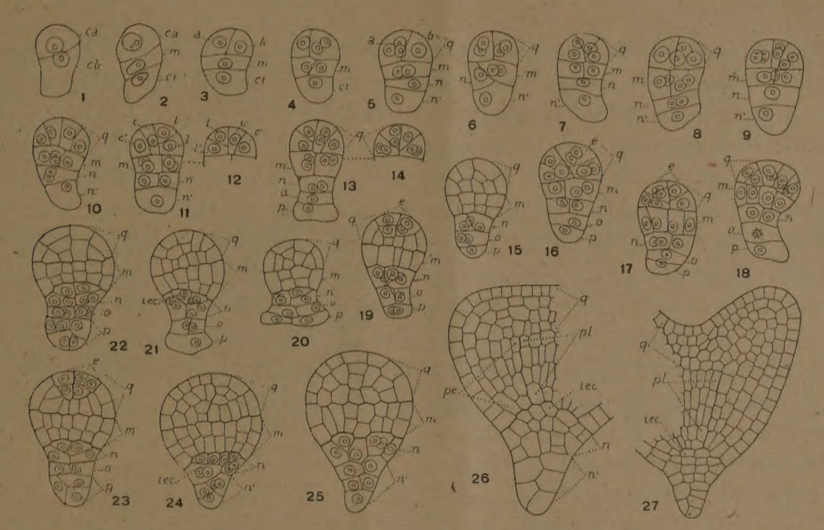


Fig. 1 à 27. — ***Polygala vulgaris*** L. — Les principaux termes du développement de l'embryon. ***ca*** et ***cb***, cellule apicale et cellule basale du proembryon bicellulaire; ***a*** et ***b***, cellules-filles de la cellule apicale; ***m***, cellule intermédiaire de la tétrade ou partie hypocotylée; ***ci***, cellule inférieure de la tétrade; ***n***, cellule-fille supérieure de *ci* ou hypophyse; ***n'***, cellule-fille inférieure de *ci* ou suspenseur proprement dit; ***q***, quadrants ou partie cotylée *sensu lato*; ***l***, ***l'***, ***c***, ***c'***, cellules-filles des quadrants; ***e***, épiphyse; ***o*** et ***p***, cellules-filles de *n'*; ***iec***, initiales de l'écorce de la racine; ***pe***, périblème; ***pl***, plérome. Les figures 11 et 12 représentent les deux coupes voisines d'un même proembryon; il en est de même des figures 13 et 14. G. = 290; 150 pour la figure 27.

à l'un des deux éléments l (*fig.* 16). Quoi qu'il en soit de ces diverses dispositions, vues en coupes longitudinales, on peut dire qu'il se constitue généralement, chez le *Polygala vulgaris*, un groupe épiphysaire aux dépens des deux cellules l, filles de deux quadrants opposés, et sans aucun doute aussi aux dépens d'éléments produits, vers le sommet, par les cellules c, filles des deux autres quadrants. Tous les autres éléments, originaires des quadrants, concourent à la formation de la partie cotylée *sensu stricto*.

La partie hypocotylée tire origine de l'élément m de la tétrade; il donne d'abord 4 cellules circumaxiales (*fig.* 5, 7 à 14), qui se cloisonnent ensuite longitudinalement et transversalement comme le montrent les figures 17 à 26. L'élément n du proembryon octocellulaire (*fig*, 5, 7) engendre une hypophyse véritable; il donne également 4 cellules circumaxiales (*fig.* 8 à 18) qui se divisent comme chez le *Myosurus mini-*

mus [3] ou le *Ceanothus azureus* [4], par des parois horizontales ou obliques, s'insérant sur les parois latérales du dermatogène et sur les cloisons méridiennes, pour donner les initiales de l'écorce de la racine et celles du primordium de la coiffe (*fig.* 21 à 25). Enfin, l'élément *n'* (*fig.* 5, 7), après avoir produit deux cellules superposées, *o* et *p*, donne naissance, par divisions diversement orientées, à un court suspenseur.

Il se dégage, somme toute, de ces observations que, chez le *Polygala* comme chez les Rhamnacées et les Potentillées, la partie cotylée *sensu lato* tire origine de la cellule apicale ou des quadrants, et la partie hypocotylée de la cellule intermédiaire de la tétrade; qu'il se constitue une hypophyse véritable à la base du corps embryonnaire et un groupe épiphysaire au sommet. Comme chez les Rhamnacées, la cellule *n*, fille supérieure de la cellule inférieure de la tétrade, joue le rôle de cellule hypophysaire. Il ne se différencie pas de cellule épiphysaire primordiale, le tissu épiphysaire étant produit partie par des cellules-filles des quadrants, partie par des éléments de génération plus jeune. Par cette dernière particularité, le *Polygala vulgaris* représenterait un terme de passage entre le 1er et le 2e groupe embryogénique de la classification périodique.

La séance est levée à 16h.

A. Lx.

---

(3) R. Souèges, *Comptes rendus*, 53, 1911, p. 686; *Bull. Soc. bot. Fr.*, 58, 1911, p. 542; 59, 1912, p. 23.

(4) R. Souèges, *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 1673.